Постановка задачи: найти приближенно корень ур-я $f(x)=0$ (1)

на $[a,b]$; $f\in C[a,b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$.

- Если f строго монотонна, можно делением отрезка пополам. Погрешность на n-м шаге: $\frac{b-a}{2^n}$.

При дополнительных усл-ях на функцию — более тонкие методы.

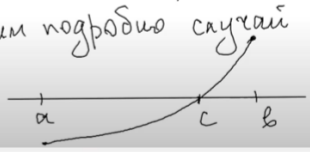
Идея: перейти к эквивалентному ур-ю

$$F(x)=x \qquad (2)$$

Пусть ф-ция f удовл-т условиям:
1) $f(a)\cdot f(b)<0$; 2) $f\in C^1[a,b]$;
3) $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in[a,b]$; 4) f' монотонна на $[a,b]$

Таким образом, возможны 4 случая:
а) $f'(x)>0$ и $\nearrow$; б) $f'(x)>0$ и $\searrow$;
в) $f'(x)<0$ и $\nearrow$; г) $f'(x)<0$ и $\searrow$.

Рассмотрим подробно случай а). В этом случае f возр-т на $[a,b]$; $f(a)<0$, $f(b)>0$.



$$\geq\ x_n-\frac{f'(\xi_n)(x_n-c)}{f'(x_n)}=x_n-x_n+c=c,\text{ т.е. } x_{n+1}\geq c.$$

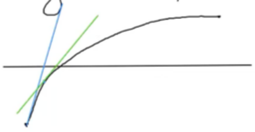
Если $x_n=c$, $x_{n+1}=x_n=c$.

Далее, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{\overset{>0}{f(x_n)}}{\underset{>0}{f'(x_n)}}<x_n$.

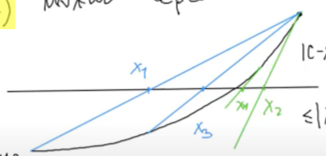
Пусть $x_n>c$

Д-ли, что $\{x_n\}$ монотонна и огр-на $\Rightarrow$ сходится. В силу леммы 1: $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$. ч.т.д.

Замеч-е Случай г) рассм-ся аналогично; в случаях б), в) нужно взять $x_0=a$.



2) Можно чередовать методы:



$|c-x_n|\leq$
$\leq|x_n-x_{n+1}|$

3) На практике применяют модиф-й метод Ньютона: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$

Опр. 1 Послед-ть $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ наз-ся итерационной послед-тью, построенной по ф-ции F, если все x_n лежат в области опред-я F ($x_n\in D(F), n=0,1,\ldots$) и (*) $x_n=F(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$.

Лемма 1. Пусть $F\in C[a,b]$; $x_n\in[a,b]$, $n=0,1,\ldots$. Если $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$, то c — корень ур-я (2) (т.е. $c=F(c)$).

Д-во: Если $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}c$, то $x_{n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}c$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}F(x_{n-1})=F(c)$ (в силу непр-ти F на $[a,b]$; $c\in[a,b]$, т.к. $a\leq x_n\leq b$). Значит, $c=F(c)$ (переходим к пределу в (*)). ч.т.д.

Метод касательных (метод Ньютона)

Положим $F(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $x\in[a,b]$.

Тогда $F\in C[a,b]$; ур-е $f(x)=0 \Leftrightarrow F(x)=x$.

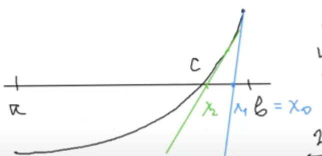
Т.2 Пусть $x_0=b$; $x_n=F(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$, где $f(c)=0$.

Д-во: покажем, что $x_n\in[c,b]$ и $\{x_n\}$ не возр-т. $x_0=b>c$ — верно. Пусть $x_n>c$, тогда

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{f(x_n)-\overset{=0}{f(c)}}{f'(x_n)}=x_n-\frac{\overset{0<}{f'(\xi_n)}(x_n-c)}{\underset{>0}{f'(x_n)}}\ \geq$$

т. Лагранжа, $\xi_n\in(c;x_n)$; $\leq f'(x_n)$

Геометрический смысл метода Ньютона



Ур-е касат-й в точке $(x_n;f(x_n))$

$$y=f'(x_n)(x-x_n)+f(x_n)$$

$$y=0\Leftrightarrow x=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=F(x_n)=x_{n+1}.$$

Значит, x_{n+1} — абсцисса точки пересечения с осью Ox касательной, проведенной к графику f в точке $(x_n;f(x_n))$.

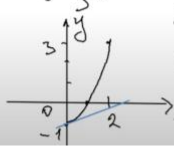
Оценка погрешности

$$f(x_n)=f(x_n)-\underbrace{f(c)}_{=0}=f'(\xi_n)(x_n-c)$$

$$\Rightarrow |x_n-c|=\left|\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)}\right|\leq\frac{|f(x_n)|}{m},\quad m=\inf_{a\leq x\leq b}|f'(x)|$$

Пример

$f(x)=x^2-1$, $x\in[0,2]$



$x_0=2$ $\quad x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_1=2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{4}$

$x_2=\dfrac{5}{4}-\dfrac{9/16}{5/2}=\dfrac{5}{4}-\dfrac{9}{40}=\dfrac{41}{40}$